数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 16-30

IDEMPOTENT MODULES IN STABLE MODULE CATEGORIES

飛田明彦 (Akihiko Hida)
埼玉大学教育学部 (Faculty of Education, Saitama University)

Rickard の論文 [R1] 及び関連した [B1],[BCR2],[BCR3] についての簡単な紹介を行います. idempotent module とは有限生成加群の stable category のある種の subcategory に対応するもので, 特に加群の variety に関連したものが重要です. 加群の tensor 積に関して 1 の直交巾等元分解のようになっていることよりこの名前で呼ばれます. これは必ずしも (というよりほとんどの場合) 有限生成ではないのですが, 有限生成加群に関する結果の証明にも有効に使われています. また, [BCR1] における, 無限生成加群に対する variety の理論を発展させるためにも必要となります.

1 章では triangulated category と stable category についてごく簡単に説明します. 2 章では idempotent module の定義, 存在等について, 3 章ではそれらの基本的な性質, 特に, 加群の variety に関して定義される idempotent module について取り上げます. 4 章 5 章では, 有限生成とは限らない加群に対する (rank) variety の理論を, 6 章では principal block に属する有限生成加群への応用について紹介します. 最後に 7 章では, 加群の variety と誘導に関する [C2] の結果を紹介します (佐々木氏 (愛媛大学) による).

なお, 必ずしも最新の結果の紹介でないこと, 及び idea の源である代数的位相幾何との関連に触れられなかったことをお詫びいたします. 著者達による解説 [B2],[C3],[R2], 河合, 庭崎両氏による解説 [KN1],[KN2], 及び関連した論文 [BK],[D],[W1], [W2] 等も参考にして下さい. また triangulated category については [C1], [H], [W] 等を参照して下さい.

1. Triangulated categories

Triangulated category $\mathcal{T}$ とは, additive category であり, selfequivalence $\Sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ が決められており, distinguished triangle (以下 triangle) と呼ばれる列

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

の族が指定されており, 更にいくつかの公理をみたすものである.

G を有限群, k を正標数 p の代数的閉体, kG を群環とする. Mod kG 及び mod kG を (right)kG- 加群の category, 有限生成 kG- 加群の category とする. stable category StMod kG とは, object は Mod kG と同じであり,

$$\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}_{kG}(M, N)/(\text{projective hom.})$$

と定義されるものである. ここで $f : M \longrightarrow N$ が projective hommorphism であるとは, $f = gh$, $h : M \longrightarrow P$, $g : P \longrightarrow N$, P は projective と分解されることである. kG- 加群を injective の中に埋め込みその cokernel を取ることにより, self-equivalence

$$\Omega^{-1} : \mathrm{StMod}\ kG \longrightarrow \mathrm{StMod}\ kG$$

が得られる. 更に, triangle を次の様に決めることにより, StMod kG は triangulated category となる: まず, Mod kG での exact sequence

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

に対し, 可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \text{inj.} & \longrightarrow & \Omega^{-1}(X) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

が作られ, 列

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Omega^{-1}(X)$$

が得られる. この様にして作られる列と同型なものを, StMod (kG) での triangle と定義する. stmod kG についても同様である.

$\mathcal{T}$ を triangulated category, $\mathcal{C}$ を $\mathcal{T}$ の triangulated subcategory とする. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{T}$ の thick subcategory であるとは, direct summand をとる操作で閉じていること, つまり,

$$X \oplus Y \in \mathcal{C} \Rightarrow X \in \mathcal{C}$$

となることである. $\mathcal{T}$ において任意の direct sum が存在すると仮定する. $\mathcal{C}$ が direct sum で閉じているとき, つまり, $\mathcal{C}$ の object の任意の集合 $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し,

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \in \mathcal{C}$$

となるとき, $\mathcal{C}$ を $\mathcal{T}$ の localizing subcategory という.

$\mathcal{T}$ における列,

$$X_0 \xrightarrow{\alpha_0} X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

に対し,

$$\oplus X_i \xrightarrow{1-\alpha} \oplus X_i$$

から triangle

$$\oplus X_i \xrightarrow{1-\alpha} \oplus X_i \longrightarrow Y \longrightarrow$$

を作り, その第 3 項 $Y = \operatorname{hocolim} X_i$ を X_i の homotopy colimit という.

2. Idempotent modules

以下, $\mathcal{T} = \mathrm{StMod}\, kG$, $\mathcal{C}$ を stmod kG の thick subcategory, $\mathcal{C}^{\oplus}$ を $\mathcal{C}$ の生成する $\mathcal{T}$ の localizing subcategory とする.

Theorem 2.1 ([R1]). $X \in \mathrm{StMod}\, kG$ に対し, $\mathcal{T}$ での triangle

$$T_{\mathcal{C}}(X) : E_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow X \longrightarrow F_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow$$

で次をみたすものが存在:
(1)$E_{\mathcal{C}}(X) \in \mathcal{C}^{\oplus}$
(2)$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{\oplus}, F_{\mathcal{C}}(X)) = 0$ (この性質を $F_{\mathcal{C}}(X)$ は $\mathcal{C}^{\oplus}$-local であるという.)

ここでは (quotient category $\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}$ の存在を仮定して) [R2] での証明を紹介する.

Lemma 2.2. (1) $M \in \mathrm{StMod}\, kG$ に対し,

$$M : \mathcal{C}^{\oplus}\text{-local} \Leftrightarrow \mathcal{C}\text{-local}.$$

(2) $C \in \mathrm{mod}\, kG$ と, $\mathcal{T}$ における列,

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots$$

に対して,

$$\mathrm{Hom}(C, \mathrm{hocolim}\ X_i) \cong \mathrm{colim}\ \mathrm{Hom}(C, X_i).$$

(3)hocolim X_i は $\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}$ での列, $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots$ の homotopy colimit と $\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}$ の object として同型である.

Proof of Theorem 2.1. (i) $\mathcal{T}$ の object X_i $(i \geq 0)$ を $X_0 = X$ として inductive に定義する. X_i が定義されているとする.

$$S_i = \oplus(C \otimes \mathrm{Hom}(C, X_i))$$

(C は $\mathcal{C}$ の object の同型類の代表系を動く) とし, natural map $S_i \longrightarrow X_i$ から triangle

$$S_i \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow$$

により X_{i+1} を構成する.
(ii) $F_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{hocolim}\ X_i$ とおくとこれは $\mathcal{C}^{\oplus}$-local である. 実際, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{Hom}(C, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, X_{i+1})$ は 0 なので,

$$\mathrm{Hom}(C, F_{\mathcal{C}}(X)) = \mathrm{Hom}(C, \mathrm{hocolim}\ X_i) = \mathrm{colim}\ \mathrm{Hom}(C, X_i) = 0$$

つまり, $F_{\mathcal{C}}(X)$ は $\mathcal{C}$-local でありよって $\mathcal{C}^{\oplus}$-local である.
(iii) triangle

$$E_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow X \longrightarrow F_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow$$

を作ると, $E_{\mathcal{C}}(X) \in \mathcal{C}^{\oplus}$ である. これは次の様に示される. $S_i \in \mathcal{C}^{\oplus}$ なので triangle

$$S_i \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow$$

より, $\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}$ において $X_i \cong X_{i+1}$ である. よって $\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}$ において,

$$F_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{hocolim}_{\mathcal{T}}\ X_i \cong \mathrm{hocolim}_{\mathcal{T}/\mathcal{C}^{\oplus}}\ X_i \cong X$$

である. これは $E_{\mathcal{C}}(X) \in \mathcal{C}^{\oplus}$ を意味する.

Remark 2.3. $T_{\mathcal{C}}(X)$ は定理の条件 (1)(2) により (同型を除いて) 一意に定まる.

stmod kG の thick subcategory $\mathcal{C}$ が tensor ideal であるとは, 任意の $M \in \mathcal{C}$ と $N \in \mathrm{stmod}\, kG$ に対して, $M \otimes N \in \mathcal{C}$ となることである. 以下, $\mathcal{C}$ を $\mathcal{T}$ の tensor ideal subcategory とする.

Lemma 2.4. (1)$M \in \mathcal{C}^{\oplus}$ ならば任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して, $M \otimes X \in \mathcal{C}^{\oplus}$.
(2)$L \in \mathcal{T}$ が $\mathcal{C}$-local ならば任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して $M \otimes X$ は $\mathcal{C}^{\oplus}$-local.

次の定理が idempotent module の名の由来である.

Theorem 2.5 ([R1, Proposition 5.13, Theorem 5.19]). $E = E_{\mathcal{C}}(k)$, $F = F_{\mathcal{C}}(k)$ とする.
(1) $X \in \mathcal{T}$ に対して,

$$E_{\mathcal{C}}(X) \cong E \otimes X, \quad F_{\mathcal{C}}(X) \cong F \otimes X.$$

(2) $X \in \mathcal{T}$ に対して,

$$X \in \mathcal{C}^{\oplus} \Leftrightarrow X \cong E \otimes X$$

$$X : \mathcal{C}^{\oplus}\text{-local} \Leftrightarrow X \cong F \otimes X.$$

(3)

$$E \otimes E \cong E, \quad F \otimes F \cong F, \quad E \otimes F \cong 0.$$

Proof. (1)

$$T_{\mathcal{C}}(k) : E \longrightarrow k \longrightarrow F \longrightarrow$$

に X を tensor して, triangle

$$E \otimes X \longrightarrow X \longrightarrow F \otimes X \longrightarrow$$

が得られる. Lemma 2.4 より, $E \otimes X \in \mathcal{C}^{\oplus}$, $F \otimes X$ は $\mathcal{C}^{\oplus}$-local である.
(2)$X \in \mathcal{C}^{\oplus}$ は $T_{\mathcal{C}}(X)$ が

$$X =\!=\!= X \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

と同型であることと同値であり, X が $\mathcal{C}$-local であることは, $T_{\mathcal{C}}(X)$ が

$$0 \longrightarrow X =\!=\!= X \longrightarrow$$

と同型であることと同値である.
(3) は (1)(2) より明らか. □

3. Varieties for finitely generated modules

有限生成加群に対する *variety* の理論について簡単に述べる. $V_G(k)$ を $H^*(G,k)$ の maximal ideal spectrum とし, 有限生成 kG- 加群 M に対して, $V_G(M)$ を $H^*(G,k)$ における $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ の annihilator によって定義される $V_G(k)$ の closed subvariety とする.

Proposition 3.1. (1)mod kG での完全列,

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

に対し, $V_G(M_i) \subseteq V_G(M_j) \cup V_G(M_l)$.
(2)$M, N \in \mathrm{mod}\ kG$ に対し,

$$V_G(M \otimes N) = V_G(M) \cap V_G(N).$$

(3)

$$V_G(M) = \bigcup_E \mathrm{res}^*_{G,E}(V_E(M_E))$$

ここで, E は G の elmentary abelian p-subgroup すべてを動く.
(4)$G \geq H$ ならば

$$V_H(M) = (\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1}(V_G(M)).$$

$V_G(k)$ の homogeneous closed subvariety V に対し, $\tilde{V}$ を V の homogeneous closed subvariety の全体の集合とする. $\mathcal{W} \subseteq \tilde{V}_G(k)$ に対し次の条件を考える.

$$V, W \in \mathcal{W} \Rightarrow V \cup W \in \mathcal{W},\ V \in \mathcal{W}, W \in \tilde{V} \Rightarrow W \in \mathcal{W} \qquad (*)$$

この様な $\mathcal{W}$ に対し, $\mathcal{C}(\mathcal{W})$ を $V_G(M) \in \mathcal{W}$ となる M からなる stmod kG の full subcategory とする. これは Proposition 3.1 により tensor ideal subcategory である. $E(\mathcal{W}) = E_{\mathcal{C}(\mathcal{W})}(k)$ とおき, $V \in \tilde{V}_G(k)$ に対しては, $E(V) = E(\tilde{V})$ とおく.

Remark 3.2. $E(V)$ に関しては, cohomology と関連したより具体的な構成法がある ([R1, 6 章]). この場合 $\mathcal{C}(V)^{\oplus}$ は $V_G(M) \subseteq V$ となる $M \in$ mod kG の filtered colimit と同型なものからなる subcategory と一致する.

以下, $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ は $(*)$ を満たすと仮定する. また,

$$\overline{\mathcal{V} \cup \mathcal{W}} = \{Z \in \tilde{V}_G(k) \mid Z \subseteq V \cup W, V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}\}$$

とおく.

Proposition 3.3 ([R1, Proposition 6.2, Theorem 7.5]).

$$E(\mathcal{V}) \otimes E(\mathcal{W}) = E(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}),$$

$$F(\mathcal{V}) \otimes F(\mathcal{W}) = F(\overline{\mathcal{V} \cup \mathcal{W}}).$$

Theorem 3.4 (Mayer-Vietoris triangle [R1, Theorem 8.1]). 次の triangle が存在:

$$E(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \longrightarrow E(\mathcal{V}) \oplus E(\mathcal{W}) \longrightarrow E(\overline{\mathcal{V} \cup \mathcal{W}}) \longrightarrow\ ,$$

$$F(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \longrightarrow F(\mathcal{V}) \oplus F(\mathcal{W}) \longrightarrow F(\overline{\mathcal{V} \cup \mathcal{W}}) \longrightarrow\ .$$

ここで, もう一種類の idempotent module $\kappa(V)$ を導入する. $E(V)$ は $\tilde{V}$ に対応するものであったが, これはちょうど V に対応するものであり, 無限生成加群の variety を考える際重要な役割を果たす.

Definition. $V \in \tilde{V}_G(k)$ に対し, V のどの既約成分も含まない $W \in \tilde{V}$ の全体を $\mathcal{W}'$ とし,

$$\kappa(V) = E(V) \otimes F(\mathcal{W}')$$

とおく.

Proposition 3.5 ([BCR2, Lemma 8.2, Theorem 8.5]). (1)$V \in \tilde{V}_G(k)$ の既約成分を $V_1, \ldots, V_t$ とすると,

$$\kappa(V) \cong \oplus_{i=1}^{t} \kappa(V_i).$$

(2)$H \leq G$, W を $(\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1}(V)$ の既約成分 Z で, $\mathrm{res}^*_{G,H}(Z)$ が V の既約成分となるもの全ての union とすると,

$$\kappa(V)_H \cong \kappa(W).$$

Example 3.6. $p=2$, $G=\langle g_1,g_2\rangle$ を位数 4 の elemetary abelian 2-group とする. $H^*(G,k)=k[\zeta_1,\zeta_2]$(多項式環) であり, $V_G(k)=k^2$ である. $\alpha\in k$ に対し, l_α を原点と $(\alpha,1)$ を通る直線, l_∞ を原点と $(1,0)$ を通る直線とする.

$$F(l_\alpha)\cong k[t]\oplus k[t]$$

G の作用は,

$$g_1\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad g_2\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1+t\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられる. $(0,k)$ は $F(l_\alpha)$ の submodule で,

$$E(l_\alpha)\cong F(l_\alpha)/(0,k).$$

一方,

$$F(l_\infty)\cong k[t]\oplus k[t]$$

G の作用は,

$$g_1\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad g_2\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられる. また

$$\mathcal{U}=\{W\in\tilde{V}_G(k)\mid W\neq V_G(k)\}$$

に対し,

$$F(\mathcal{U})\cong k(t)\oplus k(t)$$

G の作用は,

$$g_1\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad g_2\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられる.

4. Rank varieties

$E=\langle g_1,\dots,g_r\rangle$ を位数 p^r の elementary abelian p-group とする. $x_i=g_i-1\ \in kE$ とおく. $V_E^r(k)=k^r$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in V_E^r(k)$, $\alpha\neq0$ に対し, $u_\alpha=1+\sum\alpha_ix_i$ とおく. $\langle u_\alpha\rangle$ は位数 p の巡回群である.

Definition. $M\in\mathrm{Mod}\,kG$ に対し,

$$V_E^r(M)=\{\alpha(\neq0)\in V_E^r(k)\mid M:\text{not }\langle u_\alpha\rangle-\text{free}\}\cup\{0\}$$

とおく.

K を k を含む代数的閉体で $\mathrm{tr.deg}_kK\geq r$ であるものとする. $k[y_1,\dots,y_r]$ を $V_E^r(k)$ の coordinate ring とする. V を $V_E^r(k)$ の homogeneous irreducible closed subvariety, P を対応する $k[y_1,\dots,y_r]$ の homogeneous prime ideal, $k[V]=k[y_1,\dots,y_r]/P$, $k(V)$ を $k[V]$ の field of fractions とする. $k(V)$ は K の中に埋め込まれる. $k(V)\subseteq K$ とする. $\alpha_V=(\bar{y_1},\dots,\bar{y_r})\in K^r=V_E^r(K)$ とおく.

Definition.

$$\mathcal{V}_E^r(k) = \{V_E^r(k) \text{の homog. irred. closed subvariety}(\neq \{0\})\}$$

とし, $M \in \mathrm{Mod}\ kE$ に対し,

$$\mathcal{V}_E^r(M) = \{V \in \mathcal{V}_E^r(k) \mid \alpha_V \in V_E^r(K \otimes M)\}$$

とおく.

Remark 4.1. これは, K の取り方に依存しない. また, $M \in \mathrm{mod}\ kE$ ならば,

$$\mathcal{V}_E^r(M) = \{V \in \mathcal{V}_E(k) \mid V \subseteq V_E^r(M)\}$$

である.

次の結果は有限生成加群の場合 Dade の補題として知られているものの一般化である.

Theorem 4.2 ([BCR2, Corollary 5.6]). $M \in \mathrm{Mod}\ kE$ に対し,

$$M : \text{projective} \Leftrightarrow \mathcal{V}_E^r(M) = \emptyset.$$

Example 4.3. Example 3.6の $F(\mathcal{U}) = F$ を考える. F は projective ではないが任意の $\alpha \in V_E^r(k)$ に対して, F は $\langle u_\alpha \rangle$-free である. 実際 $\mathcal{V}_E^r(F) = \{V_E^r(k)\}$ である.

有限生成加群の rank variety の重要な性質である tensor product theorem が, この場合にも成立する.

Theorem 4.4 ([BCR2, Corollary 7.5]). $M, N \in \mathrm{Mod}\ kE$ に対し,

$$\mathcal{V}_E^r(M \otimes N) = \mathcal{V}_E^r(M) \cap \mathcal{V}_E^r(N).$$

rank variety と 加群の variety の関係については, 自然な bijection

$$\beta : V_E^r(k) \longrightarrow V_E(k)$$

が存在し, $M \in \mathrm{mod}\ kE$ に対して,

$$\beta(V_E^r(M)) = V_E(M)$$

となることが知られている. $V_E(k)$ の homogeneous closed subvariety と対応する idempotent module の rank variety の関係は次の様になる.

$$\mathcal{V}_E(k) = \{V_E(k) \text{の homog. irred. closed subvariety}(\neq \{0\})\}$$

とおく.

Theorem 4.5 ([BCR2, Theorem 9.1, Corollary 9.2]). $V \in \mathcal{V}_E(k)$ ならば

$$\mathcal{V}_E^r(E(V)) = \beta^{-1}(\tilde{V} \cap \mathcal{V}_E(k))$$
$$\mathcal{V}_E^r(F(V)) = \beta^{-1}(\mathcal{V}_E(k) \backslash \tilde{V})$$
$$\mathcal{V}_E^r(\kappa(V)) = \{\beta^{-1}(V)\}.$$

上記 $\kappa(V)$ の rank variety と Theorem 4.2, Theorem 4.4 により次を得る.

Remark 4.6. $V \in \mathcal{V}_E(k)$, $M \in \mathrm{Mod}\ kE$ に対し,

$$\begin{aligned}\beta^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E^r(M) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_E^r(\kappa(V)) \cap \mathcal{V}_E^r(M) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \kappa(V) \otimes M : \text{not projective.}\end{aligned}$$

5. Varieties for infinitely generated modules

[BCR1] で展開されている有限生成とは限らない加群に対する variety の理論は, [BCR1] の中でも述べられている様に, 部分群との関係がうまくいかない, tensor product theorem が成り立たない (すなわち Proposition 3.1 の (2) (4) が成り立たない) 等多少不満の残るものであった. [BCR2] では加群の variety の新しい定義を与えこれらが成立することを示している. ここでは idempotent module $\kappa(V)$ が有効に用いられている.

Definition ([BCR2, Lemma 10.3]).

$$\mathcal{V}_G(k) = \{V_G(k) \text{の homog. irred. closed subvariety}(\neq \{0\})\}$$

とし, $M \in \mathrm{Mod}\ kG$ に対し,

$$\mathcal{V}_G(M) = \{V \in \mathcal{V}_G(k) \mid \kappa(V) \otimes M : \text{not projective}\}$$

とおく.

[BCR2] では complexity を用いて,

$$\mathcal{V}_G(M) = \{V \in \mathcal{V}_G(k) \mid \text{complexity of } \ M \otimes E(V) = \dim V\}$$

と定義される. もちろんこれは上記の定義と同値である. ここでは Remark 4.6 との関連を強調するためこの様に定義した. 次は明らかである.

Proposition 5.1 ([BCR2, Lemma 10.5]). E が elementary abelian p-group ならば, $M \in \mathrm{Mod}\ kE$ に対し,

$$\beta(\mathcal{V}_E^r(M)) = \mathcal{V}_E(M).$$

そして期待される性質が全て成立する.

Theorem 5.2 ([BCR2, Theorem 10.6, 10.7, 10.8]). $M, N \in \mathrm{Mod}\ kG$ とする.
(1)

$$\mathcal{V}_G(M) = \bigcup_E \mathrm{res}^*_{G,E}(\mathcal{V}_E(M_E))$$

ここで, E は G の elmentary abelian p-subgroup すべてを動く.
(2)$H \leq G$ ならば,

$$\mathcal{V}_H(M) = (\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1}(\mathcal{V}_G(M)).$$

(3)

$$\mathcal{V}_G(M \otimes N) = \mathcal{V}_G(M) \cap \mathcal{V}_G(N).$$

6. COHOMOLOGY OF MODULES IN THE PRINCIPAL BLOCK

$B_0(kG)$ を kG の principal block とする. ここでは $B_0(kG)$ に属する有限生成加群に関する結果を紹介する. $\mathcal{W} \subseteq \tilde{V}_G(k)$ に対し, $\mathcal{C}_0(\mathcal{W})$ を $V_G(M) \in \mathcal{W}$ となる M からなる stmod $B_0(kG)$ の full subcategry, $W \in \tilde{V}_G(k)$ に対しては, $\mathcal{C}_0(W) = \mathcal{C}_0(\tilde{W})$ とおく.

[B1] では, [BCR] での予想を証明するために idempotent module を用いている. まず次の様な設定を考える. $L \subseteq V_G(k)$ を原点を通る直線とし, E を $L \subseteq \mathrm{res}^*_{G,E}(V_E(k))$ となる elementary abelian p-subgroup の中で極小なものとする. $\mathrm{res}^*_{G,E}(l_0) = L$ となる直線 l_0 をとり, D を $N_G(E)$ における l_0 の stabilizer, $l = \mathrm{res}^*_{E,D}(l_0)$ とおく.

Theorem 6.1 ([B1, Theorem 3.1]).

$$E(l)\uparrow^G \cong E(L).$$

Corollary 6.2. $M \in \mathrm{Mod}\, kG$, $\mathcal{V}_G(M) \subseteq \{L\}$ ならば,

$$M \cong N\uparrow^G \quad (\text{in StMod } kG)$$

となる $N \in \mathrm{Mod}\, kD$ が存在.

Definition ([BCR, Definition 10.1]).

$$Y_G = \bigcup_{H \leq G} \mathrm{res}^*_{G,H}(V_H(k)) \cup \{0\}$$

(H は $C_G(H)$ が p-nilpotent ではない subgroup 全てを動く) を nucleus と呼ぶ.

Corollary 6.2 より次が得られる. variety が直線の場合へ帰着する議論, D での議論は [BCR] と同様である.

Theorem 6.3 ([B1, Corollary 5.3]). $M \in \mathrm{Mod}\, B_0(kG)$ は non-projective で, $\mathcal{V}_G(M) \not\subseteq Y_G$ とする. このとき,

$$H^n(G, M) \neq 0$$

となる $n > 0$ が存在.

次は [BCR] で nuclear homology module と呼ばれているものに関する結果である.

Corollary 6.4 ([B1, Theorem 1.2]). stmod $B_0(kG)$ は k と $\mathcal{C}_0(Y_G)$ の生成する thick subcategory $\langle k, \mathcal{C}_0(Y_G)\rangle$ に一致する.

[BCR3] では [N] 他に触発されて, stmod kG の thick subcategory の分類を試みている. 3 章の条件 (*) をみたす $\mathcal{W}$ に対し, $\mathcal{C}_0(\mathcal{W})$ は stmod $B_0(kG)$ の thick subcategory である. [BCR3] の結果は, nucleus Y_G に関係する部分を除けば stmod $B_0(kG)$ の thick subcategory はこの様なもので全てとなる, というものである. まず次の結果は, $W \in \tilde{V}_G(k)$ に対し, $\mathcal{C}_0(W)$ はほぼ一つの加群で生成されることを示しており, Corollary 6.4 の一般化ともなっている.

Theorem 6.5 ([BCR3, Proposition 5.4, 5.7]). $M \in \mathrm{mod}\, kG$, $V_G(M) = W$ ならば,

$$\mathcal{C}_0(W) = \langle M, \mathcal{C}_0(Y_G \cap W)\rangle.$$

$\mathcal{C}$ を stmod $B_0(kG)$ の thick subcategory とし, $\mathcal{W} = \{V_G(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$ とおく. 明らかに $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0(\mathcal{W})$ である. 一方, $M \in \mathcal{C}_0(\mathcal{W})$ ならば, $W = V_G(M) = V_G(N)$ となる $N \in \mathcal{C}$ が存在し, 定理により,

$$M \in \mathcal{C}_0(W) = \langle N, \mathcal{C}_0(W \cap Y_G) \rangle \subseteq \langle \mathcal{C}, \mathcal{C}_0(\mathcal{W} \cap \tilde{Y_G}) \rangle$$

となる. よって次を得る.

Corollary 6.6 ([BCR3, Theorem 5.5, 5.8]).

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{W}) = \langle \mathcal{C}, \mathcal{C}_0(\mathcal{W} \cap \tilde{Y_G}) \rangle.$$

特に, $Y_G = \{0\}$(つまり order p の element の centralizer は全て p-nilpotent) ならば stmod $B_0(kG)$ の thick subcatgory は全て $\mathcal{C}_0(\mathcal{W})$ の形である.

7. Varieties and Induction

7.1. **はじめに.** この章は佐々木（愛媛大学）によります. ここでは Carlson による論文 [C2] の主定理を紹介させていただきたいと思います. 文字通り, 浅学非才をもかえりみず, あえて, 紹介したいと思うのは

(1) この論文は Benson の定理 (Theorem 6.1) の議論を布衍して得られたものであること
(2) Introduction から (イタリック体は筆者による)
The statement and proof of the main theorem are very technical and *use almost all of the technology of varieties for infinitly generated modules.*
従って, とても読んでみたいこと
(3) しかし, 実際に読んでみると, 主定理の証明のための議論のなかには読みやすいとはいえない個所があること
(4) この論文が掲載されている雑誌は国内では入手しやすくはないこと

などによります.

記号はすべて飛田氏による前節までと同様とする. ただし, 群の加群への作用は右からとする. また, 部分群からの誘導加群 $L^{\uparrow G}$ や部分群への制限加群 $M_{\downarrow H}$ はそれぞれ L^G や M_H, $M_{|H}$ と表す. 部分群 $H \leq G$ と元 $s \in G$ に対して $H^s = s^{-1}Hs$ とおく. 次は念のための補足である. 記号を用意する. closed subvariety $V \subseteq V_G(k)$ に対して $\mathfrak{H}(V) = \mathcal{V}_G(k) \cap \tilde{V}$ $(= \{X \in \mathcal{V}_G(k) \mid X \subseteq V\})$ とおく.

Proposition 7.1. (1) subvariety $V \subseteq V_G(k)$ に対応する idempotent modules の varieties は

$$\mathcal{V}_G(E(V)) = \mathfrak{H}(V), \quad \mathcal{V}_G(F(V)) = \mathcal{V}_G(k) \setminus \mathfrak{H}(V)$$

である.
(2) 部分群 $H \leq G$ と kH- 加群 L に対して

$$\mathcal{V}_G(L^G) = \mathrm{res}^*_{G,H}\, \mathcal{V}_H(L).$$

7.2. **Main theorem.** 定理を述べる前にひとつ言葉を用意する. irreducible subvariety $X \in \mathcal{V}_G(k)$ は部分群 H からの引き戻しになっている (ie, $X \in \mathrm{res}^*_{G,H}(\mathcal{V}_H(k))$) とき H によって support されるという. さらに, H のどの真部分群によっても support されないとき minimally support されるという. また, X が H によって (minimally) support されるとき, H は X の (minimal) support であるということにする. Theorem 5.2 (1) により, minimal support は基本可換 p- 部分群にとれる. 次の Lemma が基本的な道具である.

Lemma 7.2. irreducible subvariety $X \in \mathcal{V}_G(k)$ が基本可換 p- 部分群 A を support にもつとする．このとき，KA の shifted cyclic subgroup $\langle u_\alpha \rangle$ で条件

任意の kG- 加群 M について，

$$X \in \mathcal{V}_G(M) \Leftrightarrow K \otimes M \text{ が } K\langle u_\alpha \rangle \text{ 上自由加群でない}$$

を満たすものが存在する．

Proof. X は A を support にもつから，ある $Y \in \mathcal{V}_A(k)$ によって，$X = \mathrm{res}^*_{G,A} Y$ と表される．写像 $\beta^{-1} : \mathcal{V}_A(k) \to \mathcal{V}^r_A(k)$ による Y の像 $\beta^{-1}(Y) \in \mathcal{V}^r_A(k)$ を Y^* とおく．$\alpha = \alpha_{Y^*}$ として shifted cyclic subgroup $\langle u_\alpha \rangle$ をつくればよい． □

Corollary 7.3. irreducible subvariety $X \in \mathcal{V}_G(k)$ が基本可換 p- 部分群 A を support にもつとする．Lemma 7.2 によって，X に対応する shifted cyclic subgroup を $\langle u \rangle$ とする．kG- 加群の triangle

$$M_1 \xrightarrow{\sigma} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \Omega^{-1}(M_1)$$

において次は同値である：

(a) $X \notin \mathcal{V}_G(M_3)$;

(b) 係数拡大 $\sigma' : K \otimes M_1 \to K \otimes M_2$ が $\mathrm{StMod}\, K\langle u \rangle$ において同型である．

Theorem 7.4. H を有限群 G の部分群とする． $V \subseteq V_G(k)$ を closed subvariety とする．$\mathcal{C}(V)^\oplus$ に属する任意の kG- 加群 M が $\mathrm{StMod}\, kG$ において H からの誘導加群に同型であるためには subvariety $W \subseteq V_H(k)$ で条件

(1) $\mathrm{res}^*_{G,H}(W) = V$

(2) 直線 $l \subseteq W$ は基本可換 p- 部分群 $A \leq H$ を minimal support にもつとし，$l = \mathrm{res}^*_{H,A} l'$ とする．任意の $s \in G \setminus H$ について，$A^s \leq H$ ならば $\mathrm{res}^*_{H,A^s}(l'^s) \not\subseteq W$

をみたすものが存在することが必要十分である．

Proof. 以下 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(V)$ とおく．

まず，$\mathcal{C}^\oplus$ に属する任意の kG- 加群 M が $\mathrm{StMod}\, kG$ において H からの誘導加群に同型であると仮定する．このとき idempotent module $E(V)$ はある kH- 加群 e により，$E(V) = e^G$ と表される．Mackey 分解により

$$e^G{}_H = \sum_{HsH} e^s_{H^s \cap H}{}^H$$

であるが，$e^s_{H^s \cap H}{}^H$ を $\widetilde{e}_s$ とおく．上の Mackey 分解により，

$$\mathcal{V}_H(E(V)) = \bigcup_{HsH} \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$$

であることに注意する．特に，どの $s \in G$ に対しても $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) \subset \mathcal{V}_H(E(V))$ である．

まず，$HsH \neq HtH$ ならば

$$\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) \cap \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_t) = \emptyset$$

であることを示す．どの $Y \in \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ も $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_t)$ に属さないことを示す．Y は基本可換 p- 部分群 $A \leq H$ を support にもつとする．Lemma 7.2 により，$Y \in \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ に対応する shifted cyclic subgroup を $\langle u \rangle$ とする．$Y \notin \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_t)$ を示すために，$K \otimes \widetilde{e}_t$ が $K\langle u \rangle$ 上自由であることを示す．Y は $\mathcal{V}_H(E(V)) = \mathrm{res}^{*-1}_{G,H}(\mathfrak{H}(V))$ に属するから，

$$Y \notin \mathrm{res}^{*-1}_{G,H}(\mathcal{V}_G(k) \setminus \mathfrak{H}(V)) = \mathrm{res}^{*-1}_{G,H} \mathcal{V}_G(F(V)) = \mathcal{V}_H(F(V)).$$

よって, Corollary 7.3 により, triangle

$$E(V) \xrightarrow{\sigma} k \longrightarrow F(V) \longrightarrow \Omega^{-1}(E(V))$$

における σ の係数拡大 $\sigma' : K \otimes E(V) \to K$ は $K\langle u \rangle$ 上で射影加群を法として同型である. ところで, 直和分解

$$K \otimes E(V)_{|\langle u \rangle} = K \otimes \widetilde{e}_{s|\langle u \rangle} \oplus \sum_{HtH \neq HsH} K \otimes \widetilde{e}_{t|\langle u \rangle}$$

において, $K \otimes \widetilde{e}_s$ は, $\langle u \rangle$ のとり方により, $K\langle u \rangle$ 上自由でないから, 上の同型を考えて, $\sum_{HtH \neq HsH} K \otimes \widetilde{e}_t$ は $K\langle u \rangle$ 上自由であることがわかる. すなわち, $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) \cap \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_t) = \emptyset$ が成り立つ.

次に, variety $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ は特殊化に関して閉じていること, すなわち, $Y \in \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ かつ $Z \subseteq Y$ ならば $Z \in \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ であることを示す. そのために, 有限生成 kG- 加群 N を $V_G(N) = V$ なるものとする. このとき

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_H(N) &= \mathrm{res}_{G,H}^{*\,-1}(\mathcal{V}_G(N)) \\
&= \mathrm{res}_{G,H}^{*\,-1}(\mathfrak{H}(V)) \\
&= \mathrm{res}_{G,H}^{*\,-1}(\mathcal{V}_G(E(V))) \\
&= \mathcal{V}_H(E(V)) \\
&= \bigcup_{HsH} \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)
\end{aligned}$$

であるから, Theorem 5.2 (3) により

$$\mathcal{V}_H(N_H \otimes \widetilde{e}_s) = \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$$

である. ところが, kG- 加群 N は subcategory $\mathcal{C} = \mathcal{C}(V)$ に属し, Theorem 2.5 (2) により, $\mathrm{StMod}\, kG$ において $E(V) \otimes N \simeq N$ であるから, $\mathrm{StMod}\, kH$ において同型 $N_H \simeq \sum_{HsH} N_H \otimes \widetilde{e}_s$ を得る. 加群 N は有限生成であるから, 有限生成 kH- 加群 L_s によって $N_H \otimes \widetilde{e}_s \simeq L_s \oplus$ projective である. 従って,

$$\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) = \mathcal{V}_H(N) \cap \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) = \mathcal{V}_H(L_s) = \mathfrak{H}(V_H(L_s))$$

であり, これは特殊化に関して閉じている.

特に, $\widetilde{e}_1 = e$ であるから, $W = V_H(L_1)$ とおけば, $\mathcal{V}_H(e) = \mathfrak{H}(W)$ であり, 一方, $\mathfrak{H}(V) = \mathcal{V}_G(E(V)) = \mathrm{res}_{G,H}^{*} \mathcal{V}_H(e) = \mathrm{res}_{G,H}^{*} \mathfrak{H}(W)$ であるから, $V = \mathrm{res}_{G,H}^{*} W$ である. これで条件 (1) が示された.

次に条件 (2) について考える. 直線 $l \subseteq W$ は minimal support として基本可換 p- 部分群 $A \leq H$ をもつとし, $l = \mathrm{res}_{H,A}^{*} l'$ であるとする. 元 $s \in G \setminus H$ をとる. $A^s \leq H$ であると仮定する. Theorem 5.2 (2) により, $l' \in \mathcal{V}_A(e)$ である. $A^s \leq H$ であるから,

$$\mathrm{res}_{H,A^s}^{*} l'^s = \mathrm{res}_{H,H^s \cap H}^{*} \mathrm{res}_{H,A^s}^{*} l'^s \in \mathrm{res}_{H,H^s \cap H}^{*}(\mathcal{V}_{H^s \cap H}(e^s)) = \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[dd, dash] & l \subseteq W & H \arrow[d, dash] & \star \in \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) \\
 & & H^s \cap H \arrow[d, dash] & \bullet \in \mathcal{V}_{H^s \cap H}(e^s) \arrow[u, dotted] \\
A & l' \in \mathcal{V}_A(e) \arrow[uu, dotted] & A^s & l'^s \in \mathcal{V}_{A^s}(e^s) \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{V}_H(e) \cap \mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) = \emptyset$ であったから, $\mathrm{res}^*_{H,A^s} l'^s \notin \mathcal{V}_H(e) = \mathfrak{H}(W)$, すなわち, $\mathrm{res}^*_{H,A^s} l'^s \not\subseteq W$ を得る.

逆に, subvariety $W \subseteq V_H(k)$ が条件 (2) を満たすと仮定し, $V = \mathrm{res}^*_{G,H} W$ とおく. W に対応する idempotent kH-modules を $e = E(W)$, $f = F(W)$ とおく. StMod kG において同型 $E(V) \simeq e^G$ が成り立つことを示せば十分である. 実際, これが示されれば, Theorem 2.5 (2) により, 任意の $M \in \mathcal{C}^{\oplus}$ は kH- 加群の誘導加群に StMod kG において同型である.

triangle

$$e \xrightarrow{\sigma} k \longrightarrow f \longrightarrow \Omega^{-1} e$$

の σ を G に誘導した写像 $\sigma \otimes 1 : e^G \to k_H^G$ と relative augumentation $\varepsilon : k_H^G \to k$ (ie, $\sum_t a_t \otimes t \mapsto \sum_t a_t$) との合成を考え, triangle

$$e^G \xrightarrow{\varepsilon(\sigma\otimes 1)} k \longrightarrow f' \longrightarrow \Omega^{-1}(e^G)$$

を考える. これが V に対応する triangle

$$E(V) \longrightarrow k \longrightarrow F(V) \longrightarrow \Omega^{-1}(E(V))$$

に同型であることを示す. そのためには, Remark 2.3 により

(i) 誘導加群 e^G は $\mathcal{C}^{\oplus}$ に属する

(ii) 加群 f' は $\mathcal{C}^{\oplus}$-local である

を示せばよい. (i) は $e = E(W) \in \mathcal{C}(W)^{\oplus}$ であることから従う. (ii) を示すには, Lemma 2.2 (1) により, $\mathcal{C}$ に属する任意の kG- 加群 M について, StMod kG において

$$\mathrm{Hom}(M, f') = 0$$

であることを示せばよい. M は有限生成であるから, 同型

$$\mathrm{Hom}(M, f') \simeq \mathrm{Hom}(k, M^* \otimes f')$$

が成り立つ. よって, $M^* \otimes f'$ が射影的であることを示せばよい. さらに, $\mathcal{V}_G(M^*) = \mathcal{V}_G(M)$ も成り立つから, Theorem 5.2 (3) により, $\mathcal{V}_G(M) \cap \mathcal{V}_G(f') = \emptyset$ であることを示せばよい. $\mathcal{V}_G(M) \subseteq \mathfrak{H}(V)$ であるから, 結局

$$\mathfrak{H}(V) \cap \mathcal{V}_G(f') = \emptyset$$

であることを示せばよい.

さて, $X \in \mathfrak{H}(V)$ とする. $V = \mathrm{res}^*_{G,H} W$ であったから, ある $Y \in \mathfrak{H}(W)$ によって, $X = \mathrm{res}^*_{G,H} Y$ と表される. 基本可換 p- 部分群 $A \leq H$ を Y の support とし, Lemma 7.2 によって, Y に対応する shifted cyclic subgroup を $\langle u \rangle$ とする. idempotent module $f = F(W)$ の variety は $\mathcal{V}_H(f) = \mathcal{V}_H(k) \setminus \mathfrak{H}(W)$ であったから, Y を含まない. よって, Corollary 7.3 により, triangle の係数拡大

$$K \otimes e \xrightarrow{\sigma'} K \longrightarrow K \otimes f \longrightarrow K \otimes \Omega^{-1} e$$

において, σ' は射影加群を法として, $K\langle u\rangle$ 上で同型である.

次に, $s\in G\setminus H$ に対して $K\otimes\widetilde{e}_s$ は $K\langle u\rangle$ 上自由であることを示す. そのために, $Y\notin\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ であることをいう. variety $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ は特殊化に関して閉じているから, 直線 $l\subseteq Y$ が $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ に属さないことをいえば十分である. $l\in\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)$ であると仮定する. $\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s)=\mathrm{res}^*_{H,H^s\cap H}\mathcal{V}_{H^s\cap H}(e^s)$ であるから, l の minimal support として $H^s\cap H$ の基本可換 p-部分群 B をとり, $l=\mathrm{res}^*_{H,H^s\cap H}\,l_0$, $l_0=\mathrm{res}^*_{H^s\cap H,B}\,l'$, $l'\in\mathcal{V}_B(e^s)$, と表わすことができる. $t=s^{-1}$ とおくと, $B^t\leq H$ であるから, $\mathcal{V}_{B^t}(e)=\mathrm{res}^{*\,-1}_{H,B^t}\mathcal{V}_H(e)=\mathrm{res}^{*\,-1}_{H,B^t}\mathfrak{H}(W)$ である. 従って, $\mathrm{res}^*_{H,B^t}\,l'^t\in\mathfrak{H}(W)$ である. 一方, 条件 (2) によれば, $\mathrm{res}^*_{H,B^t}\,l'^t\notin\mathfrak{H}(W)$ であるから, 矛盾である.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, dash] & l\in\mathcal{V}_H(\widetilde{e}_s) & H \arrow[d, dash] & l^t\in\mathcal{V}_H(e)=\mathfrak{H}(W) \\
H^s\cap H \arrow[d, dash] & l_0\in\mathcal{V}_{H^s\cap H}(e^s) \arrow[u, dotted] & H\cap H^t \arrow[d, dash] & l_0^t\in\mathcal{V}_{H\cap H^t}(e) \arrow[u, dotted] \\
B & l'\in\mathcal{V}_B(e^s) \arrow[u, dotted] & B^t & l'^t\in\mathcal{V}_{B^t}(e) \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

Mackey 分解により

$$K\otimes e^G{}_H\simeq(K\otimes e)\oplus\sum_{HsH\neq H}K\otimes\widetilde{e}_s$$

であり, 右辺の第 2 項は $K\langle u\rangle$ 上自由である. relative augumentatioin ε の K への係数拡大を ε' とすれば, 合成 $\varepsilon'(\sigma'\otimes 1): K\otimes e^G\to K$ は $K\otimes e$ 上では σ' と一致する. これは, $K\langle u\rangle$ 上, 射影加群を法として同型であったから, 準同型 $\varepsilon'(\sigma'\otimes 1)$ は $K\langle u\rangle$ 上, 射影加群を法として同型である. よって Corollary 7.3 により triangle

$$e^G\stackrel{\varepsilon(\sigma\otimes 1)}{\longrightarrow}k\longrightarrow f'\longrightarrow\Omega^{-1}(e^G)$$

を考えて, $Y\notin\mathcal{V}_H(f')=\mathrm{res}^{*\,-1}_{G,H}\mathcal{V}_G(f')$ である. 従って, $X=\mathrm{res}^*_{G,H}Y\notin\mathcal{V}_G(f')$ であることが結論される. これが任意の $X\in\mathfrak{H}(V)$ について成り立つから, $\mathfrak{H}(V)\cap\mathcal{V}_G(f')=\emptyset$ である. □

References

[B1] D. J. Benson, *Cohomology of modules in the principal block of a finite group*, New York J. of Math. 1 (1995), 196-205.

[B2] D. J. Benson, *Infinite dimensional modules for finite groups*, Infinite length mosules (H. Krause, C. M. Ringel ed.), Trends in math. Birkhäuser, (2000), 251-272.

[BCR] D. J. Benson, J. F. Carlson, G. R. Robinson, On the vanishing of group cohomology, J. Algebra 131 (1990), 40-73.

[BCR1] D. J. Benson, J. F. Carlson, J. Rickard, *Complexity and varieties for infinitely generated modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 118 (1995), 223-243.

[BCR2] D. J. Benson, J. F. Carlson, J. Rickard, *Complexity and varieties for infinitely generated modules, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), 597-615.

[BCR3] D. J. Benson, J. F. Carlson, J. Rickard, *Thick subcategories of the stable module category*, Fundamenta Math. 153 (1997), 59-80.

[BK] D. J. Benson, H. Krause, *Generic idempotent modules for a finite group*, Algebras and Representation theory 3 (2000), 337-346.

[C1] J. F. Carlson, *Modules and group algebras*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, (1996).

[C2] J. F. Carlson, *Varieties and induction*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 2 (1996), 101-114.

[C3] J. F. Carlson, *The thick subcategory generated by the trivial module*, Infinite length mosules (H. Krause, C. M. Ringel ed.), Trends in math., Birkhäuser, (2000), 285-296.

[D] P. Daugulis, *Stable endomorphism rings of idempotent E-modules*, preprint, (1998).

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, (1988).

[KN1] 河合浩明, 庭崎隆, *Quotient category* と *cohomology I,II*, 数理研短期共同研究, 有限群のコホモロジー論の研究報告集, (1994), 1-30.

[KN2] 河合浩明, 庭崎隆, *Complexity quotient categories for group algebras I,II*, 第5回多元環の表現論シンポジウム報告集, (1995), 15-37.

[N] A. Neeman, *The Chromatic tower for $D(R)$*, Topology 31 (1992), 519-532.

[R1] J. Rickard, *Idempotent modules in the stable category*, J. London Math. Soc. (2) 56 (1997), 149-170.

[R2] J. Rickard, *Bousfield localization for representaion theorists*, Infinite length mosules (H. Krause, C. M. Ringel ed.), Trends in math. Birkhäuser, (2000), 273-283.

[W] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, Cambridge University Press, (1994).

[W1] W. W. Wheeler, *Quillen stratification for the stable module category*, Quart. J. Math. Oxford (2) 50 (1999), 355-369.

[W2] W. W. Wheeler, *A local description of the stable category*, preprint, (1999).